

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT**

---

**BÁO CÁO HỌC THUẬT**

**KHOẢNG CÁCH BIẾN PHÂN TOÀN PHẦN VÀ SỰ HỘI TỤ CỦA  
MỘT SỐ PHÂN PHỐI THƯỜNG GẶP**

**ThS. Nguyễn Thu Hằng**

**Hà nội, tháng 06 năm 2025**

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

---

**BÁO CÁO HỌC THUẬT**

**KHOẢNG CÁCH BIẾN PHÂN TOÀN PHẦN VÀ SỰ HỘI TỤ CỦA  
MỘT SỐ PHÂN PHỐI THƯỜNG GẶP**

**Xác nhận của bộ môn**

**Hà nội, tháng 06 năm 2025**

## MỤC LỤC

Đặt vấn đề	1
1. Một số kiến thức cơ sở về khoảng cách biến phân toàn phần	2
2. Kết quả và thảo luận	3
Kết luận	8

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Khoảng cách biến phân toàn phần (total variation distance) là một trong những khoảng cách cơ bản trong lý thuyết xác suất. Nó là một trong những tiêu chuẩn đầu tiên xét đến khi nghiên cứu về khoảng cách cũng như sự hội tụ của các biến ngẫu nhiên. Với vai trò quan trọng, khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Đầu tiên phải kể đến là những nghiên cứu cơ bản nhất về khoảng cách biến phân toàn phần như tính toán về khoảng cách biến phân toàn phần đối với một số biến ngẫu nhiên thường gặp; những tính chất cơ bản và mối liên hệ giữa khoảng cách biến phân toàn phần đến sự hội tụ của biến ngẫu nhiên [1, 2]. Tiếp theo là rất nhiều các công trình nghiên cứu về tính toán và ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên khác nhau, chẳng hạn như cho phân phối là tích các phân phối 0-1 [3], bất đẳng thức Le Cam cho ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần giữa tổng các phân phối nhị thức và phân phối Poisson [4], cho mô hình Markov,... Các nghiên cứu cũng được mở rộng sang phân phối nhiều chiều [5]. Bên cạnh đó, việc so sánh giữa các khoảng cách (metric) cũng được chú ý [6].

Trong báo cáo này, với mục đích phục vụ nghiên cứu, giảng dạy, chúng tôi tổng hợp một số tính chất cơ bản của khoảng cách biến phân toàn phần sau đó chúng tôi tính toán khoảng cách biến phân toàn phần cho một số biến ngẫu nhiên thường gặp. Chúng tôi cũng ước lượng về khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson, từ đó đưa ra một công thức ước lượng đơn giản để minh họa cho sự xấp xỉ được giữa hai phân phối này. Cuối cùng, chúng tôi cũng dùng phần mềm Python để tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson trong một số trường hợp cụ thể.

Báo cáo của chúng tôi chia làm hai phần:

Phần 1. Nêu một số kiến thức cơ bản về khoảng cách biến phân toàn phần.

Phần 2. Một số kết quả và thảo luận.

## 1. Một số kiến thức cơ sở về khoảng cách biến phân toàn phần

Theo [7], khoảng cách biến phân toàn giữa hai biến ngẫu nhiên được định nghĩa như sau:

**Định nghĩa 1.1.** Xét không gian đo  $(\Omega, \mathcal{F})$  và  $P, Q$  là hai độ đo xác suất trên  $(\Omega, \mathcal{F})$  thì khoảng cách biến phân toàn phần được định nghĩa bởi

$$d_{TV}(P, Q) = \sup_{A \in \mathcal{F}} |P(A) - Q(A)|. \quad (1)$$

Nói cách khác, nếu  $X, Y$  là hai biến ngẫu nhiên thì

$$d_{TV}(X, Y) = \sup_{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(X \in D) - P(Y \in D)|. \quad (2)$$

Người ta cũng chứng minh được rằng

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2} \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} |E(h(X)) - E(h(Y))|, \quad (3)$$

trong đó,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn  $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \leq 1$ .

Nếu  $X, Y$  có hàm mật độ lần lượt là  $f(x)$  và  $g(x)$  thì

$$d_{TV}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx. \quad (4)$$

Nếu  $X, Y$  là các biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị trong  $\mathbb{Z}$  thì

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |P(X = k) - P(Y = k)|. \quad (5)$$

Chúng tôi tổng hợp một số tính chất quan trọng sau đây của khoảng cách biến phân toàn phần.

Từ định nghĩa, ta dễ dàng có được những tính chất sau đây:

**Mệnh đề 1.2.** Khoảng cách biến phân toàn phần là một Metric đủ.

**Mệnh đề 1.3.** Xét không gian đo  $(\Omega, \mathcal{F})$  và  $P, Q$  là hai độ đo xác suất trên  $(\Omega, \mathcal{F})$  thì  $0 \leq d_{TV}(P, Q) \leq 1$ . Hơn nữa,  $d_{TV}(P, Q) = 0$  khi và chỉ khi  $P = Q$  và  $d_{TV}(P, Q) = 1$  khi và chỉ khi tồn tại  $A \in \mathcal{F}$  sao cho  $P(A) = 1, Q(A) = 0$  hoặc  $P(A) = 0, Q(A) = 1$ .

**Mệnh đề 1.4.** Nếu  $X, Y$  là hai biến ngẫu nhiên thì  $d_{TV}(X, Y) \leq P(X \neq Y)$ .

**Mệnh đề 1.5.** Cho dãy biến ngẫu nhiên liên tục  $\{F_i\}_{i=1}^n$  và biến ngẫu nhiên liên tục và  $F_\infty$ . Khi đó,  $d_{TV}(F_n, F_\infty) \rightarrow 0$  tương đương  $F_n \xrightarrow{L_1} F_\infty$ .

**Mệnh đề 1.6.** Cho dãy biến ngẫu nhiên  $\{F_i\}_{i=1}^n$  và biến ngẫu nhiên  $F_\infty$ . Nếu  $d_{TV}(F_n, F_\infty) \rightarrow 0$  thì  $F_n \xrightarrow{\text{law}} F_\infty$ .

Điều ngược lại nói chung là không đúng. Ta lấy ví dụ  $F_n$  là dãy biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ  $\frac{2}{\pi} \cos^2(nx) \mathbf{1}_{[0, \pi]}(x)$  và  $F_\infty$  là biến ngẫu nhiên có phân phối đều liên tục trên  $[0, \pi]$  Khi đó,  $F_n \xrightarrow{\text{law}} F_\infty$ . Tuy nhiên

$$\begin{aligned} d_{TV}(F_n, F_\infty) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} |2 \cos^2(nx) - 1| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |\cos(2nx)| dx \\ &= \frac{4n}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4n}} \cos(2nx) dx = 1 > 0, \quad \forall n. \end{aligned} \quad (6)$$

**Mệnh đề 1.7.** Nếu  $\{X_i\}_{i=1}^n$  và  $\{Y_i\}_{i=1}^n$  là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, có kì vọng và phương sai hữu hạn. Khi đó

$$d_{TV}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n d_{TV}(X_i, Y_i). \quad (7)$$

Chi tiết chứng minh của Mệnh đề 2.6 và Mệnh đề 2.7 có thể tìm trong [7, 8].

## 2. Kết quả và thảo luận

Trong phần này, chúng tôi tính toán và ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần cho một số biến ngẫu nhiên thường gặp.

**Mệnh đề 2.1.** Nếu  $X, Y$  là hai biến ngẫu nhiên có phân phối đều liên tục  $X \sim U[0, a]$  và  $Y \sim U[0, b]$  với  $0 < a < b$  thì

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{b-a}{b}. \quad (8)$$

Chứng minh. Áp dụng công thức (4) ta được

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2} \left( \int_0^a \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) dx + \int_a^b \frac{1}{b} dx \right) = \frac{b-a}{b}.$$

**Mệnh đề 2.2.** Nếu  $X$  có phân phối 0-1 với tham số  $p$  và  $Y$  có phân phối 0-1 với tham số  $q > p$  thì

$$d_{TV}(X, Y) = q - p. \quad (9)$$

Chứng minh. Bảng phân phối xác suất của  $X$  và  $Y$  là

$X$	0	1
$P$	$1-p$	$p$

$Y$	0	1
$P$	$1-q$	$q$

Theo công thức (5), ta có

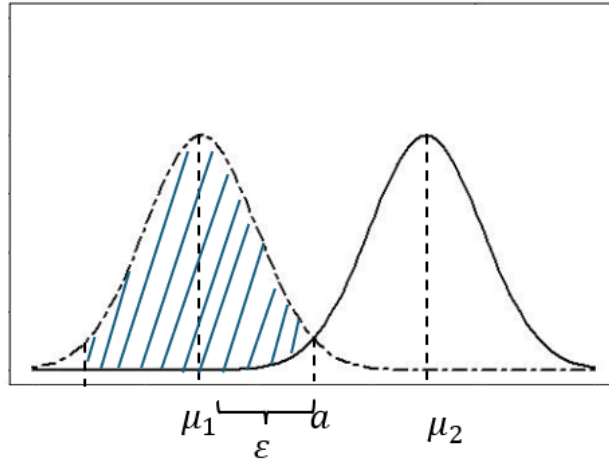
$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2}(1-p-(1-q)+q-p) = q-p.$$

**Mệnh đề 2.3.** Nếu  $X, Y$  là hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn,  $X \sim N(\mu_1, 1)$  và  $Y \sim N(\mu_2, 1)$  với  $\mu_2 > \mu_1$ , thì

$$d_{TV}(X, Y) = 2\phi_0(\varepsilon), \quad (10)$$

trong đó,  $\phi_0$  là hàm Laplace và  $\varepsilon = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}$ .

Chứng minh.



Đặt  $a = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ . Theo công thức (4), ta có

$$\begin{aligned} d_{TV}(X, Y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}} - e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2}} \right| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \left( e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}} - e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1-\varepsilon}^{\mu_1+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}} dx = 2\phi_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng tôi quan tâm đến khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson. Trước hết, ta xét trường hợp đơn giản.

**Mệnh đề 2.4.** Nếu  $X$  có phân phối 0-1 với tham số  $p$  và  $Y$  có phân phối Poisson tham số  $p$  thì

$$d_{TV}(X, Y) = p(1 - e^{-p}). \quad (11)$$

Chứng minh. Bảng phân phối xác suất của  $X$  là

$X$	0	1
$P$	$1-p$	$p$

Và  $P(Y = k) = \frac{e^{-p} p^k}{k!}$ . Mặt khác, theo công thức khai triển Maclaurin ta có

$$e^p = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^i}{i!} \text{ và } e^{-p} = 1 - p + \frac{e^{-c}}{2!} p^2 \geq 1 - p; \quad 0 < c < p.$$

Suy ra, theo công thức (5), ta thu được

$$\begin{aligned} d_{TV}(X, Y) &= \frac{1}{2} \left[ e^{-p} - (1-p) + p - pe^{-p} + e^{-p} \left( \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{-p} \left( 1 + p + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \dots \right) + 2p - 2pe^{-p} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^{-p} e^p + 2p - 2pe^{-p} - 1) = p(1 - e^{-p}). \end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh xong.

**Mệnh đề 2.5.** Nếu  $X$  có phân phối nhị thức tham số  $n, p$ , ( $X \sim B(n, p)$ ) và  $Y$  có phân phối Poisson tham số  $\lambda$ , ( $Y \sim P(\lambda)$ ) thì

$$d_{TV}(X, Y) \leq |np - \lambda| + \frac{\lambda^2}{n}.$$

Chứng minh. Vì khoảng cách biến phân toàn phần là Metric nên ta có

$$\begin{aligned} d_{TV}(X, Y) &= d_{TV}(B(n, p), P(\lambda)) \\ &\leq d_{TV}\left(B(n, p), B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)\right) + d_{TV}\left(B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right), P(\lambda)\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Vì biến ngẫu nhiên  $B(n, p)$  có thể coi là tổng của  $n$  biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối 0-1 với tham số  $p$  nên áp dụng ước lượng (7) và công thức (9) ta thu được

$$d_{TV}\left(B(n, p), B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)\right) \leq n \left| p - \frac{\lambda}{n} \right|. \quad (13)$$

Mặt khác, theo định lí Le Cam [4] ta có

$$d_{TV}\left(B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right), P(\lambda)\right) \leq n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{n}. \quad (14)$$

Thay (13) và (14) vào (12) ta thu được

$$d_{TV}(B(n, p), P(\lambda)) \leq |np - \lambda| + \frac{\lambda^2}{n}. \quad (15)$$

Từ ước lượng (15) ta thấy rằng, khi  $\lambda$  cố định và  $n \rightarrow \infty$  sao cho  $np_n \rightarrow \lambda$  thì khoảng cách biến phân toàn phần giữa biến ngẫu nhiên  $X_n \sim B(n, p_n)$  và  $P(\lambda)$  sẽ dần về 0. Từ đó suy ra sự hội tụ theo phân phối giữa  $B(n, p_n)$  và  $P(\lambda)$ . Ta thu được một cách lí giải cho sự xấp xỉ được giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson.

Phần cuối của báo cáo, chúng tôi xét một trường hợp đặc biệt, tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức  $B(n, p)$  và phân phối Poisson  $P(\lambda)$ , trong đó  $\lambda = np$ . Theo (5), ta có

$$\begin{aligned} d(B(n, p), P(\lambda)) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^n \left| C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^n \left| C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right| + 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Chúng tôi sử dụng phần mềm Python để tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối này một số trường hợp khác nhau và thu được bảng số liệu sau:

$n$	$p$	$d_{TV}$	$n$	$p$	$d_{TV}$
1	0,5	0,19673467	1	0,02	0,00039602
10	0,5	0,17183508	10	0,02	0,00300340
50	0,5	0,16696519	50	0,02	0,005583409
100	0,5	0,16662262	100	0,02	0,004572241
1	0,1	0,09516258	1	0,01	$9,9501662 \cdot 10^{-5}$
10	0,1	0,02931157	10	0,01	$8,6678929 \cdot 10^{-4}$
50	0,1	0,02595859	50	0,01	$2,2932899 \cdot 10^{-3}$

100	0,1	0,02582856	100	0,01	$2,7752947.10^{-3}$
1	0,05	0,00243852	1	0,001	$9,99500166.10^{-7}$
10	0,05	0,01185937	10	0,001	$9,86082376.10^{-6}$
50	0,05	0,01307091	50	0,001	$4,64180741.10^{-5}$
100	0,05	0,012598451	100	0,001	$8,60426922.10^{-5}$

**Bảng 1.**  $d_{TV}$  giữa phân phối chuẩn và phân phối Poisson

Từ bảng số liệu trên ta có thể thấy rằng, cùng một  $\lambda$ , nếu  $n$  càng lớn ( $p$  càng nhỏ) thì  $d_{TV}$  càng nhỏ và nếu cùng một  $n$  thì  $p$  càng nhỏ  $d_{TV}$  càng nhỏ. Tuy nhiên, bảng số liệu không thể hiện được rõ ràng sự biến thiên của  $d_{TV}$  trong trường hợp cố định  $p$  và thay đổi  $n$ .

## KẾT LUẬN

Báo cáo đã tổng kết một số kiến thức cơ bản về khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên. Từ đó, tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa một số biến ngẫu nhiên cơ bản. Báo cáo cũng đưa ra ước lượng cho khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson, đồng thời tính toán khoảng cách giữa hai phân phối trong một số trường hợp cụ thể. Kết quả của báo cáo nhằm mục đích làm tài liệu tham khảo và hỗ trợ giảng dạy cho sinh viên ngành toán.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Patrick Billingsley: Convergence of Probability Measures. Wiley, New York, 1968.
- [2] Svetlozar T. Rachev: Probability metrics and the stability of stochastic models. Wiley, Chichester, 1991.
- [3] Feng, Weiming; Liu, Liqiang; Liu, Tianren. On deterministically approximating total variation distance. Proceedings of the 2024 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 1766--1791, SIAM, Philadelphia, PA, 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.14696>.
- [4] Le Cam, Lucien. An approximation theorem for the Poisson binomial distribution. Pacific J. Math. 10 (1960), 1181—1197. DOI: 10.2140/pjm.1960.10.1181
- [5] Feng, Weiming; Guo, Heng; Jerrum, Mark; Wang, Jiaheng. A simple polynomial-time approximation algorithm for the total variation distance between two product distributions. 2023 Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA), 343--347, SIAM, Philadelphia, PA, 2023. <http://doi.org/10.46298/theoretics.23.7>.
- [6] Chae, Minwoo; Walker, Stephen G. Wasserstein upper bounds of the total variation for smooth densities. Statist. Probab. Lett. 163 (2020), 108771, 6 pp. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2020.108771>.
- [7] Nourdin, Ivan; Poly, Guillaume. Convergence in law implies convergence in total variation for polynomials in independent Gaussian, gamma or beta random variables. High dimensional probability VII, 381--394, Progr. Probab., 71, Springer, [Cham], 2016. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.2766>.
- [8] Svante Janson, Probability Distance. <https://www2.math.uu.se/~svantejs/papers/sjN21.pdf>, truy cập ngày 01 tháng 03 năm 2025.